

Examen de admitere
 Facultatea de Fizică și Matematică
 Facultatea de Informatică
 Proba scrisă – **Matematică**
 iulie 2026
Versiunea 1

1. [4 puncte] Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x = 2$ este:
- A. 0;
 - B. $\frac{1}{3}$;
 - C. $\frac{6}{e^2}$;
 - D. -1 ;
 - E. $-\frac{1}{e^2}$;**
 - F. $\frac{1}{2}$.

Soluție: Tangenta la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x = 2$ are panta egală cu $f'(2)$. Deoarece $f'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$.

2. [5 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & , \quad x \leq 1 \\ \arctg(x - 1) & , \quad x > 1 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$. Atunci valoarea expresiei $E = a + b$ este:
- A. 0;
 - B. 3;
 - C. 2;
 - D. -1 ;**
 - E. -2 ;
 - F. 6.

Soluție: Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ și deci derivabilitatea pe $\mathbb{R}$ este echivalentă cu derivabilitatea în $x_0 = 1$. Condiția de continuitate în $x_0 = 1$ arată că $1 + a - b = 0$. În acest caz, derivabilitatea în $x_0 = 1$ este echivalentă cu faptul că limitele laterale ale derivatei lui f în acest punct sunt egale, sau echivalent $2 + a = 1$. Atunci $a = -1$, iar $b = 0$, ceea ce arată că $E = -1$.

3. [4 puncte] Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\det(A) = 5$, câte din afirmațiile următoarele sunt adevărate?
- (i) $\det(-A) = -5$;
 - (ii) $\det(-2A) = 20$;
 - (iii) $\det(3A) = 15$;
 - (iv) $\det(A^2) = 25$;
 - (v) $\text{rang}(A) = 1$
- A. 0
 - B. 1
 - C. 2**
 - D. 3
 - E. 4
 - F. 5

Soluție: Folosind proprietățile $\det(k \cdot A) = k^2 \det(A)$, respectiv $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $k \in \mathbb{R}$, obținem că afirmațiile (ii), (iv) sunt adevărate, iar (i), (iii) sunt false. Deoarece $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $\det(A) = 5 \neq 0$, rezultă că $\text{rang}(A) = 2$ și deci (v) este o afirmație falsă.

4. [5 puncte] Limita șirului $(x_n)_{n \geq 2}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}\right), n \geq 2,$$

este:

- A. $\frac{3}{4}$
- B. 1
- C. $\frac{9}{4}$
- D. $\frac{1}{4}$
- E. 2
- F. $\frac{1}{3}$**

Soluție: Conform formulei de însumare a termenilor consecutivi ai unei progresii geometrice obținem:

$$x_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right), n \geq 2.$$

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$.

5. [4 puncte] Produsul tuturor soluțiilor ecuației $\log_3(3x) + \log_{x^2} 9 = \frac{7}{2}$ este

- A. $9\sqrt{3}$**
- B. 10
- C. 21
- D. $3 + \sqrt{3}$
- E. $9\sqrt{3} + 3$
- F. 84

Soluție: În condițiile de existență ($x > 0, x \neq 1$) ecuația devine

$$1 + \log_3 x + \frac{1}{2} \log_x 3^2 = \frac{7}{2},$$

sau echivalent, $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} = 0$. Se obține că $\log_3 x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, ceea ce conduce la faptul că $x \in \{\sqrt{3}, 9\}$. Produsul cerut este egal cu $9\sqrt{3}$.

6. [4 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $p = 2X^3 + X^2 + 2aX - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă polinomul p se divide cu $X^2 - 1$ atunci suma $a + b$ este egală cu:

- A. -1
- B. 1
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $\frac{5}{3}$
- E. 0**
- F. 2

Soluție: Deoarece $X^2 - 1 | p$, rezultă că $p(1) = p(-1) = 0$. Atunci $2a - b = -3$ și $2a + b = -1$. Deci $a = -1$, iar $b = 1$ ceea ce arată că $a + b = 0$.

7. [5 puncte] Fie matricea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 & 2 \\ 1 & y & 2 & 1 \\ 2 & 2y & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. Mulțimea $M = \{(x, y) \mid \text{rang}(A) = 2\}$ este:
- A. $\{(1, 0)\}$
- B. $\{(1, 1)\}$
- C. $\left\{\left(-3, -\frac{1}{3}\right)\right\}$**
- D. $\{(1, -1)\}$
- E. $\{(-1, 1)\}$
- F. $\left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

Soluție: Avem că minorul $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ și deci $\text{rang}(A) = 2$ dacă și numai dacă minorii

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ y & 2 & 1 \\ 2y & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

sunt nuli. Se obține $x = -3$ și $y = -\frac{1}{3}$.

8. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(a, 3)$ și respectiv $C(2, 2)$. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care cele trei puncte sunt coliniare este:
- A. 8
- B. 1
- C. 2
- D. 0
- E. 6**
- F. -3

Soluție: Punctele A , B , C sunt coliniare dacă și numai dacă $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ sau echivalent $a - 6 = 0$.

9. [5 puncte] Aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+6}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$ este:
- A. $\frac{6}{5}$
- B. 0
- C. $\ln \frac{5}{6}$
- D. $\ln \frac{6}{5}$**
- E. $\ln \frac{3}{2}$
- F. $\frac{\pi}{2}$

Soluție: Avem că

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 |f(x)| dx = - \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+6} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+6} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2-2x+6) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+6) \Big|_1^2 = \ln \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

10. [5 puncte] Ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)e^{\frac{1}{x}}$ este:

- A. $x + y = 0$
- B. $x - y = 0$
- C. $x - y + 1 = 0$
- D. $x - y + 4 = 0$**
- E. $x + y + 4 = 0$
- F. $x + y - 2 = 0$

Soluție: Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x} e^{\frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R}^*$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 3e^{\frac{1}{x}} \right] = 4$ rezultă că dreapta de ecuație $y = x + 4$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

11. [4 puncte] Dacă $x, y \in (0, \infty)$ sunt astfel încât $4 \lg^2 x + \lg^2 y = 1$ atunci valoarea maximă a lui x este:

- A. 1
- B. 10
- C. $\sqrt{10}$**
- D. $\frac{1}{10}$
- E. $\frac{1}{\sqrt{10}}$
- F. $\lg 2$

Soluție: Egalitatea este echivalentă cu $\lg^2 x = \frac{1}{4} (1 - \lg^2 y) \leq \frac{1}{4}$ și deci $-\frac{1}{2} \leq \lg x \leq \frac{1}{2}$. Rezultă că $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{10} \right]$. Cum ecuația $4 \lg^2 \sqrt{10} + \lg^2 y = 1$ are soluția $y = 1$, rezultă că valoarea maximă căutată este $\sqrt{10}$.

12. [5 puncte] Pe $M = (-1, 1)$ considerăm legea de compoziție asociativă ” $*$ ”, cu proprietatea că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ definită prin $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, verifică egalitatea $f(x+y) = f(x) * f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Dacă $a = \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right)$, atunci:

- A. $a = \frac{3}{4}$.
- B. $a = \frac{6}{7}$.
- C. $a = \frac{8}{9}$.
- D. $a = \frac{11}{12}$.
- E. $a = \frac{13}{14}$.**
- F. $a = \frac{15}{16}$.

Soluție: Funcția f este bijectivă, cu inversa $f^{-1} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, astfel că

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}\right) = f \left(3 \cdot f^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= f(3 \cdot \log_2(3)) = f(\log_2(27)) = \frac{27-1}{27+1} = \frac{13}{14}. \end{aligned}$$

13. [5 puncte] Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, considerăm funcția polinomială de grad 1,

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mulțimea $F = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ este un grup în raport cu operația uzuală de compunere a funcțiilor. Considerăm submulțimea

$$M = \{f_{a,b} \in F \mid a, b \in \mathbb{Z}, 0 < |a| \leq 2026, |b| \leq 2026\}.$$

Numărul funcțiilor $f \in M$, care au proprietatea că $f = f^{-1}$ este:

- A. 1
- B. 3
- C. 2026
- D. 2027
- E. 4054**
- F. 4055

Soluție: Inversa funcției $f_{a,b}$ este funcția $f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$. Condiția ca $f_{a,b} = (f_{a,b})^{-1}$ este ca $a = \frac{1}{a}$ și $b = -\frac{b}{a}$, adică $a = 1$ și $b = 0$, sau $a = -1$ și $b \in \mathbb{R}$ oarecare. Numărul funcțiilor din M care verifică aceste condiții este

$$1 + (2026 - (-2027)) = 1 + 4053 = 4054.$$

14. [6 puncte] Fie N numărul soluțiilor sistemului următor de ecuații liniare în inelul claselor de resturi $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y &= \hat{7} \\ \hat{8}x + \hat{9}y &= \hat{1}. \end{cases}$$

Atunci N este:

- A. 2
- B. 4
- C. 6**
- D. 8
- E. 9
- F. 12

Soluție: Notăm cu S mulțimea soluțiilor, adică a perechiilor $(x, y) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ care verifică ecuațiile sistemului.

Adunând cele două ecuații, obținem $\widehat{10}x = \hat{8} \iff \hat{2}x = \hat{4} \iff x \in \{\hat{2}, \hat{8}\}$.

Adunând prima ecuație înmulțită cu $\hat{2}$ la a doua, obținem $\hat{3}y = \hat{3} \iff y \in \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$.

Prin urmare, $S \subseteq \{\hat{2}, \hat{8}\} \times \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$.

Reciproc, pentru orice $(x, y) \in \{\hat{2}, \hat{8}\} \times \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$, avem $\hat{2}x = \hat{4}$, $\hat{3}y = \hat{3}$, astfel că $\hat{2}x + \hat{3}y = \hat{4} + \hat{3} = \hat{7}$ și $\hat{8}x + \hat{9}y = \hat{4} \cdot \hat{2}x + \hat{3} \cdot \hat{3}y = \hat{4} \cdot \hat{4} + \hat{3} \cdot \hat{3} = \widehat{25} = \hat{1}$.

Rezultă că $S = \{\hat{2}, \hat{8}\} \times \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$ și $N = |S| = 2 \cdot 3 = 6$.

15. [4 puncte] Sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} 3x - y + z &= -1 \\ 2x + y + 2z &= 3 \\ -x + 2y + z &= 4 \end{cases}$ este:

- A. incompatibil
- B. compatibil determinat
- C. compatibil simplu nedeterminat**
- D. compatibil dublu nedeterminat
- E. omogen
- F. de tip Cramer

Soluție: Determinantul sistemului este nul, iar un minor principal este $\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Acesta are un singur minor caracteristic și anume $\Delta_c = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Sistemul este deci compatibil simplu nedeterminat.

16. [4 puncte] Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ este:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

C. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

F. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Soluție: Deoarece $\det(A) = 5$, iar $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ rezultă că există $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

17. [4 puncte] Fie $f : [1, e^2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Numărul punctelor de extrem local ale funcției f este:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

F. 5

Soluție: Deoarece $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x \in [1, e^2]$ rezultă că funcția f este (strict) crescătoare pe intervalul $[1, e]$ și (strict) descrescătoare pe intervalul $[e, e^2]$. Se obține atunci că $x = 1$ și $x = e^2$ sunt puncte de minim local, iar $x = e$ este punct de maxim local pentru funcția f .

18. [4 puncte] Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ în jurul axei Ox este:

A. $\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi^2}{4}$

B. $\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi^2}{4}$

C. $\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi^2}{4}$

D. $\pi + \pi \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi^2}{4}$

E. $\pi - \pi \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi^2}{4}$

F. $\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{arctg} 2 - \pi^2$

Soluție: Avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \pi \left(\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \\ &= \pi \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^2 - \operatorname{arctg} x \Big|_1^2 \right) = \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

19. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(4, 2)$ și $D(2, 4)$. Aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu:
- A. 6
 - B. 8
 - C. 7**
 - D. 14
 - E. 9
 - F. 5

Soluție: Avem că $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} + \mathcal{A}_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}|\Delta_1| + \frac{1}{2}|\Delta_2|$, unde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6, \text{ iar } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = 7$.

20. [4 puncte] Modulul numărului complex

$$z = 1 - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-2} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-3} + \dots - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-2025} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-2026},$$

unde $i \in \mathbb{C}$ cu $i^2 = -1$, este:

- A. 0
- B. $\sqrt{2}$
- C. 4
- D. 1**
- E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- F. $\sqrt{3}$

Soluție: Deoarece $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i$ rezultă că

$$z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2026} = 1 + i + i^2 + \sum_{k=1}^{506} \left(i^{4k-1} + i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2}\right) = i.$$

Rezultă că $|z| = 1$.