

Examen de admitere
 Facultatea de Fizică și Matematică
 Facultatea de Informatică
 Proba scrisă – **Matematică**
 Septembrie 2026
Versiunea 1

1. [4 puncte] Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} \sin x$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x = 0$ este:

A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{6}{e^2}$
 D. -1 E. $-\frac{1}{e^2}$ **F. 1**

Soluție: Tangenta la graficul funcției f în punctul de pe grafic de abscisă $x = 0$ are panta egală cu $f'(0)$. Deoarece $f'(x) = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f'(0) = 1$.

2. [5 puncte] Suma tuturor elementelor mulțimii soluțiilor ecuației $\frac{3x}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 + x + 1}{3x} = -2$ este

A. 2 **B. -4** C. -6
 D. -1 E. -2 F. 3

Soluție: Se obține că $\frac{x^2 + x + 1}{3x} = -1$ și deci $x^2 + 4x + 1 = 0$. Conform relațiilor lui Viète, suma soluțiilor este egală cu -4.

3. [5 puncte] Mulțimea soluțiilor inecuației $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2 - 3x + 4} \leq \frac{9}{25}$ este:

A. $[1, 2]$ B. $[-1, 2]$ C. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
D. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ E. $[2, +\infty)$ F. $(-\infty, 1]$

Soluție: Deoarece $\frac{3}{5} \in (0, 1)$, inecuația este echivalentă cu $x^2 - 3x + 4 \geq 2$, cu mulțimea soluțiilor $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

4. [5 puncte] Mulțimea numerelor reale $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este:

A. $[-3, 8]$ B. $[1, 5]$ C. $(-\infty, 1)$
 D. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ **E. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$** F. $[1, +\infty)$

Soluție: Matricea A este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. Cum $\det(A) = (2-m)x^2 - 4x + 3m + 1$, rezultă că ecuația $(2-m)x^2 - 4x + 3m + 1 = 0$ nu admite soluții reale sau echivalent $\Delta = 4(3m^2 - 5m + 2) < 0$. Deci $m \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

5. [4 puncte] Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 3 \sin \frac{\pi}{2} & \cos \pi \\ 4 \sin \frac{\pi}{6} & \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ este:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
D. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ F. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Soluție: Deoarece $\det(A) = 5$, iar $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ rezultă că există $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. [4 puncte] Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $p = 2X^3 + 2aX - b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă polinomul p se divide cu $X^2 - X$, atunci suma $a + b$ este egală cu:

- A. -1 B. 1 C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{5}{3}$ E. 0 F. 2

Soluție: Deoarece $X^2 - X | p$, rezultă că $p(0) = p(1) = 0$. Atunci $b = 0$ și $2a - b = -2$. Deci $a = -1$, iar $b = 0$ ceea ce arată că $a + b = -1$.

7. [5 puncte] Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 2x)}{\sin 3x}$ este egală cu:

- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{4}{3}$ E. $\frac{1}{2}$ F. $\frac{1}{6}$

Soluție: Avem că: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 2x)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 2x)}{2 \sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

8. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$ și respectiv $C(3, a)$. Mulțimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care distanța de la punctul C la dreapta AB este egală cu $\sqrt{17}$, este:

- A. $\{-2, 1\}$ B. $\{-2\}$ C. $\left\{-\frac{13}{2}, 2\right\}$
D. $\emptyset$ E. $\left\{\frac{13}{2}, -2\right\}$ F. $\left\{\frac{13}{2}\right\}$

Soluție: Ecuația dreptei AB este $x - 4y + 6 = 0$. Atunci $d(C, AB) = \frac{|9 - 4a|}{\sqrt{17}}$. Se obține că $|9 - 4a| = 17$ sau echivalent $4a - 9 = \pm 17$. Deci $a \in \left\{\frac{13}{2}, -2\right\}$.

9. [5 puncte] Aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$ este:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\ln \frac{5}{6}$
D. $\ln \frac{6}{5}$ E. $\ln \frac{3}{2}$ F. $\frac{\pi}{2}$

Soluție: Avem că $f(x) = x^2(x - 1)$ și deci $f(x) \geq 0$ d.n.d. $x \geq 1$. Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 |f(x)| dx = - \int_0^1 (x^3 - x^2) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = \\ &= - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

10. [5 puncte] Mulțimea valorilor reale $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} -mx + y + z = 0 \\ x - my + z = 0 \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat, este:

A. $\{-2\}$ **B.** $\{-1\}$ **C.** $\{2\}$
D. $\{1, 2\}$ **E.** $\emptyset$ **F.** $\{-1, 2\}$

Soluție: Determinantul sistemului (omogen) este $\Delta = (2 - m)(m + 1)^2$. Sistemul este deci compatibil nedeterminat dacă și numai dacă $m \in \{-1, 2\}$. Pentru $m = -1$ se obține că sistemul este compatibil dublu nedeterminat, iar pentru $m = 2$ avem că sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

11. [4 puncte] Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$ este:

A. $y = x$ **B.** $y = 2x - 3$ **C.** $y = x + 3$
D. $y = x - 3$ **E.** $y = -x + 3$ **F.** $y = -x - 3$

Soluție: Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + x} = 1 \in \mathbb{R}^*,$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 2}{x + 1} = -3 \in \mathbb{R},$$

rezultă că dreapta de ecuație $y = x - 3$ este ecuația asimptotei cerute.

12. [5 puncte] Câte din submulțimile cu patru elemente ale mulțimii $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ conțin exact două numere pare?
A. 6 **B.** 12 **C.** 18
D. 8 **E.** 15 **F.** 35

Soluție: Orice submulțime cu patru elemente a lui X ce conține exact două numere pare este o reuniune disjunctă de forma $A \cup B$, unde $A \subset \{0, 2, 4, 6\}$, $B \subset \{1, 3, 5\}$ și $\text{card } A = \text{card } B = 2$. Deoarece A poate fi aleasă în $\mathbf{C}_4^2 = 6$ moduri distincte, iar, pentru o alegere a lui A , submulțimea B poate fi aleasă în $\mathbf{C}_3^1 = 3$ moduri diferite, rezultă că există $6 \cdot 3 = 18$ submulțimi ale lui X cu proprietățile cerute.

13. [4 puncte] Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $\sin x = 2 \cos x$, atunci valoarea lui $\cos 2x$ este:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
D. 1 **E.** $-\frac{3}{5}$ **F.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Soluție: Deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rezultă că $5 \cos^2 x = 1$.

Atunci $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{3}{5}$.

14. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele $A(-2, 1)$, $B(a, 3)$ și respectiv $C(2, 2)$. Dacă M , N , P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, respectiv $[BC]$, atunci mulțimea numerelor reale a pentru care aria ΔMNP este egală cu 1 este:

A. $\{14\}$ **B.** $\emptyset$ **C.** $\{2\}$

D. $\{0, 1\}$ **E.** $\{-2, 14\}$ **F.** $\{-3, 1, 5\}$

Soluție: Avem că $\mathcal{A}_{\Delta MNP} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{8} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{|a-6|}{8}$. Rezultă că $|a-6| = 8$, ceea ce este echivalent cu $a \in \{-2, 14\}$.

15. [4 puncte] Determinantul inversei matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:

A. 1 **B.** -4 **C.** $-\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{4}$ **E.** $-\frac{1}{2}$ **F.** $-\frac{1}{8}$

Soluție: $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{4}$.

16. [5 puncte] Fie $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2 - x + 2)e^{2x}$, $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. Tripletul (a, b, c) de numere reale, pentru care funcția F este o primitivă a funcției f este:

A. $(2, 1, 0)$ **B.** $\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ **C.** $\left(\frac{7}{4}, 2, 1\right)$

D. $(1, 1, 1)$ **E.** $(-1, 0, 1)$ **F.** $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Soluție: Funcția F este derivabilă și $F'(x) = (2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c)e^{2x}$. Rezultă că funcția F va fi o primitivă a funcției f dacă și numai dacă $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + 2b = -1 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$, sistem cu soluția $\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

17. [4 puncte] Fie $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Numărul punctelor de extrem local ale funcției f este:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2

D. 3 **E.** 4 **F.** 5

Soluție: Deoarece $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ rezultă că funcția f este (strict) crescătoare pe intervalul $(0, e]$ și (strict) descrescătoare pe intervalul $[e, +\infty)$. Se obține atunci că $x = e$ sunt unicul punct de extrem (maxim) pentru funcția f .

18. [4 puncte] Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ în jurul axei Ox este:

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** $\frac{\pi^2}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$

D. π **E.** π^2 **F.** $\frac{1}{2}$

Soluție: Avem:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \pi \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x \Big|_0^{\pi} - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

19. [4 puncte] În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(4, 2)$. Ecuația înălțimii din B a triunghiului $\triangle ABC$ este:

- A.** $y = 5x - 16$ **B.** $y = 5x - 14$ **C.** $y = 14x - 5$
D. $y = x - 5$ **E.** $y = -5x + 14$ **F.** $y = x - 2$

Soluție: Înălțimea din B trece prin acest punct și are panta egală cu $-\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{x_A - x_C}{y_A - y_C} =$
5. Ecuația cerută este $y - 1 = 5(x - 3)$ sau echivalent $y = 5x - 14$.

20. [4 puncte] Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție

$$x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Simetricul față de legea "o" a lui $x = 3$ este:

- A.** 4 **B.** $\frac{3}{7}$ **C.** $-\frac{3}{7}$
D. $\frac{19}{3}$ **E.** $\frac{19}{9}$ **F.** $-\frac{5}{9}$

Soluție: Elementul neutru al legii date este $e = \frac{7}{3}$. Simetricul, y , al lui $x = 3$ verifică egalitatea $3 \circ y = \frac{7}{3}$, sau echivalent $3y - 4 = \frac{7}{3}$. Se obține $y = \frac{19}{9}$.